1, 2, 3. Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничениями на передачу. Определение равновесных цен в сетевом аукционе. Финансовый баланс в сетевом аукционе с ограничениями на передачу.

Постановка задачи:

$c_п$ — ценовая заявка потребителей $п \in П$ (готовность купить 1 единицу товара по цене не выше $c_п$)

$c_г, г \in Г$ — ценовые заявки генераторов (готов продать 1 единицу товара по цене не ниже $c_г$)

Найти равновесные цены и объемы $x_п$ и $x_г$, которые являются **индивидуально рациональными** стратегиями участников.

Математическая модель

Функция благосостояния рынка:

$$\sum_{п \in П} c_п x_п - \sum_{г \in Г} c_г x_г \to \max_{x_г, x_п}$$
$$\sum x_п - \sum x_г = 0, x_п \in [0, \overline{x_п}], x_г \in [0, \overline{x_г}]$$

Равновесие:

$$L(x, \lambda) = \sum_П (c_п - \lambda) x_п + \sum_Г (\lambda - c_г) x_г \to \max \sim \sum_П \max_{x_п} (c_п - \lambda) x_п + \sum_Г \max_{x_г} (\lambda - c_г) x_г$$

$$c_п - \lambda - \pi_п^+ + \pi_п^- = 0, п \in П$$
$$\lambda - c_г - \pi_г^+ + \pi_г^-, г \in Г$$

Финансовый баланс:

$$\lambda \left(\sum_П x_п \right) - \lambda \left(\sum_Г x_г \right) = 0, \text{ экономический смысл множителя лагранжа } \lambda \text{равновесная цена на рынке}$$

Территориально распределенный аукцион:

В задаче фигурирует генераторы (поставщики) в узле s: $г \in s : Г_s$ и потребители в узле $s : п \in s : П_s$.

Задача: найти равновесие с учетом перетолков товара между узлами и ограничений на пропускную способность сети.

Формулировка задачи:

$$(1) g(x_п, x_г) = \sum_{п \in П} c_п x_п - \sum_{г \in Г} c_г x_г \to \max$$
$$(2) \sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} = \sum_{п \in П_s} x_п - \sum_{г \in Г_s} x_г \quad \forall s = \overline{1, N} \Rightarrow h(x_п, x_г, f)$$
$$(3) \quad -\underline{f_{rs}} \le f_{rs} \le \overline{f_{rs}} \quad (r, s) \Rightarrow k(f)$$
$$(4) \quad 0 \le x_г \le V_i, г \in Г \Rightarrow \overline{u}(x_г), \underline{u}(x_г)$$
$$(5) \quad 0 \le x_п \le V_п, г \in П \Rightarrow \overline{v}(x_п), \underline{v}(x_п)$$

$x_г$ — объем поставщика (генератора) $г \in Г, V_г$ — максимальный объем;

$x_п$ — объем потребления $п \in П$, $V_п$ максимальный объем.

$c_г$ — целевая заявка поставщика (генератора) $г \in Г$

$c_п$ — целевая заявка потребителя $п \in П$

$s = \overline{1, N}$ — индекс узла.

$A(s)$ — множество ветвей выходящих из узла $s \quad \{r | \exists (s, r)\}$

$B(s)$ — множество ветвей входящих в узел s $\{r | \exists (r, s)\}$

f_{rs} — переменная потока по ветви (r, s). Если $f_{rs} > 0$, то поток из r в s, если $f_{rs} < 0$, то поток из s в r.

(1) — целевой функцией является функция благосостояния рынка

(2) — материальный баланс (финансовый баланс) в узле s (ограничения баланса спроса и предложения в узле s сети)

(3) — Ограничения на пропускную способность сети

(4) и (5) — ограничения поставки и потребления.

Решая задачу оптимизации с помощью функции Лагранжа вводим следующий множители Лагранжа (неотрицательные):

(2) λ_s

(3) $\sigma^+_{rs}, \sigma^-_{rs}$ (цена пропускной способности ветви (r, s))

(4) $\pi^-_\text{г}, \pi^+_\text{г}$

(5) $\pi^-_\text{п}, \pi^+_\text{п}$

После решения задачи оптимизации (поиск равновесных объемов и цен) получим:

λ^*_s —равновесная цена в узле s.

$x^*_\text{п}, x^*_\text{г}$ — объемы участников аукциона.

Для билета 2.

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = g(x_\text{п}, x_\text{г}) - \sum_s \lambda_s h(x_\text{п}, x_\text{г}, f) - \sum \sigma^+_{rs}\overline{k}_{rs} + \sum \sigma^-_{rs}\underline{k}_{rs} - \sum \pi^+_\text{г}\overline{u}_\text{г} + \sum \pi^-_\text{г}\underline{u}_\text{г} - \sum \pi^+_\text{п}\overline{v}_\text{п} + \sum \pi^-_\text{п}\underline{v}_\text{п}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\text{г}} = -c_\text{г} + \lambda_s - \pi^+_\text{г} + \pi^-_\text{г} = 0, \text{г} \in \Gamma_s$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\text{п}} = c_\text{п} - \lambda_s - \pi^+_\text{п} + \pi^-_\text{п} = 0, \text{п} \in \Pi_s$$

$$\lambda_s = c_\text{г} + \pi^+_\text{г} - \pi^-_\text{г}, \text{г} \in \Gamma_s \quad c_\text{п} = \lambda_s + \pi^+_\text{п} - \pi^-_\text{п}, \text{п} \in \Pi_s$$

Если максимальный объем $\Rightarrow \pi^-_\text{г} = 0 \Rightarrow \lambda_s$ — цена и поставщик имеет дополнительную прибыль.

Если заявка потребителя удовлетворена полностью $\Rightarrow \pi^-_\text{п} = 0 \Rightarrow$ потребитель платит меньше, чем $\overline{c_\text{п}}$.

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = -\lambda_s + \lambda_r + \sigma^+_{rs} - \sigma^-_{rs}$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = 0 = \begin{cases} \lambda_s = \lambda_r, & -\underline{f_{rs}} < f_{rs} < \overline{f_{rs}} \\ \lambda_s = \lambda_r + \sigma^+_{rs} > \lambda_r, & f_{rs} = \overline{f_{rs}}, \sigma^+_{rs} > 0 \\ \lambda_s = \lambda_r - \sigma^-_{rs} < \lambda_r, & f_{rs} = -\underline{f_{rs}}, \sigma^-_{rs} > 0 \end{cases}$$

Таким образом узловая цена не убывает в направлении потока и строго возрастает, если ограничение насыщено (то есть достигает предельных ограничений на поток из узла s в узел r).

Для билета 3.

Финансовый баланс в узле s (материальный баланс).

$$\sum_{\text{п}\in\Pi_s} x_\text{п} - \sum_{\text{г}\in\Gamma_s} x_\text{г} = \sum_{r\in B(s)} f_{rs} - \sum_{k\in A(s)} f_{sk}$$

Домножаем уравнение баланса в узле s на λ_s

$$\lambda_s \left(\sum_{\text{п}\in\Pi_s} x_\text{п} - \sum_{\text{г}\in\Gamma_s} x_\text{г} \right) = \left(\sum_{r\in B(s)} f_{rs} - \sum_{k\in A(s)} f_{sk} \right)$$

Просуммируем правую и левую части по s:

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{п \in П_s} x_п \right) - \sum_s \left(\sum_{г \in Г_s} x_г \right) = \text{сумма денег, заплаченных потребителями - сумма денег, полученных ген}$$

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} \right) = \sum_{(i,j) \in E} f_{i,j} (\lambda_j - \lambda_i) = \sum_{(i,j) \in E} \left(\sigma^+_{i,j} \overline{f_{ij}} + \sigma^-_{ij} \underline{f_{ij}} \right) \geq 0,$$

так как

$$f_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = \begin{cases} 0, & \lambda_i = \lambda_j \\ \sigma^+_{ij} \overline{f_{ij}}, & f_{ij} = \overline{f_{ij}} \\ \sigma^-_{ij} \underline{f_{ij}}, & f_{ij} = -\underline{f_{ij}} \end{cases}$$

5. Мат и фин балансы. Описание одного из экономических агентов в однопродуктовой модели.

A - множество экон. агентов, P - продукты (то, что производится), R - ресурсы.

Пусть $A \in \mathrm{A}, i \in P \cup R$

$0 \approx \frac{dQ_i^A(t)}{dt} = X_i^A(t) - C_i^A(t) - V_i^A(t) - J_i^A(t) - \sum\limits_{B \in \mathrm{A}, B \neq A} X_i^{AB}(t)$,

где Q_i^A - запас ресурса i у агента A, все остальные переменные ≥ 0: X_i^A - производство, C_i^A - конечное потребление, V_i^A - затраты на пр-во, J_i^A - капитальные затраты, X_i^{AB} - передача продукта.

Пусть 1 агент производит один продукт, т е в уст. системе запас товара у производителя не изменяется.

$Y_i^A(t) = X_i^A(t) - V_i^A(t)$ - чистый выпуск, $Y_i^A(t) \leq M_i^A(t)$ - производственная мощ-ть.

$dM^A(t) = -\mu^A M^A(t) + \frac{J^A}{b^A}, \;\; \mu^A$ - коэффициент износа, b^A - вложение.

$Y_i^A = C_i^A + J_i^A + \sum\limits_{B \in \mathrm{A}, B \neq A} X_i^{AB}$ - ур-е баланса для стабил. предприятия.

Чтобы выйти на макроуровень, надо перейти к фин. эквивалентам: $X_i^{AB}(t) \sim \Phi_i^{BA}(t)$ - платежи. Аналогично делается переход к другим переменным.

$Y_p^A = C_p^A + J_p^A + \sum\limits_{B \in A} \Phi_p^{BA}(t)$, т е добавочная ст-ть=потреб. расходы + инвестиции в пр-во. X_p^A - бъем пр-ва, V_p^A - мат. затраты. $\frac{dk^A}{dt} = J_p^A - \mu^* k^A, k^A$ - амортизация.

Пусть $N \subseteq \mathrm{A}$ - подмн-во агентов гос-ва.

$Y_p^N + I_p^N = C_p^N + J_p^N + E_p^N$, т е ВВП + Импорт = Конеч. потребление + Накопление + Экспорт.

Это - **основное макроэкономическое тождество** или **макроэкономический баланс**.

Производство (P) в однопродуктовой модели (ОМ):

$a \in P$ - производитель. Затраты: L^a - труд, Y^a - продукт от a. Φ_Y^{Ta} - доход от продажи. $\Phi_L^{aH} = sL^a$ - зарплата, s - ставка з/п. $\Phi_s^{aT} = pS^a$ -

инвестиции, p - цена на продукт.

$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_Y^{Ta} - \Phi_S^{aT} - \Phi_L^{aT} - T^{aH} - T^{ag} + \frac{dL^{Ba}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} - R^{aB}$ - фин баланс производителя.

Прирост кассовых остатков = чистый доход - валовые инвестиции - фонд з/п - дивиденды - налоги + прирост ссуд банков - прирост остатков расчетных счетов - процентные платежи по ссудам. $Y = \sum_{a \in P} Y^a, L = \sum_{a \in P} L^a$.

Домохозяйство (H) в ОМ:

C^a - покупает, платит $\Phi_C^{aT} = pC^a$ (потребительские расходы). $\sum_{a \in H} C^a = C$ - все, что потребили дом. хоз-ва. З/п: $\Phi_L^{Pa} = sL^a$, $\sum_{a \in H} L^a = \sum_{a \in P} L^a$ - все работают на пр-ве.

$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_L^{Pa} - \Phi_C^{aT} + T^{Ba} + T^{Pa} - T^{ag} + T^{ga} - \frac{dL^{aB}}{dt} + R^{Ba}$

Прирост наличных = зп на пр-ве - потреб расходы + дивиденды банков + производителей - налоги + пособия и зп госслужащих - прирост сбережений + процентные платежи по вкладам.

Государство (G) в ОМ:

$\frac{dN^a}{dt} = -\Phi_G^{gT} + T^{cg} + T^{Bg} + T^{Pg} + T^{Hg} - T^{gH} - \frac{dL^{cg}}{dt} - R^{gc}$

Прирост кассовых остатков = - оплата гос закупок + прибыль ЦБ + налоги от банков + от производителей + от населения - пособия - прирост внут госдолга - процентные платежи.

Коммерческий банк (B) в модели ОМ:

$\frac{dN^a}{dt} = -T^{aH} - T^{ag} - \frac{dL^{aP}}{dt} + \frac{dL^{Pa}}{dt} + \frac{dL^{Ha}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} + \frac{dL^{Ba}}{dt} + \frac{dL^{ca}}{dt} - \frac{dL^{ac}}{dt} + R^{Pa} - R^{aH} - \left(R^{Ba} - R^{aB}\right) - R^{ac}$

Прирост кассовых остатков = - дивиденды - налоги - прирост ссуд произв + прирост расчет счетов произв + хозяйств - прирост ссуд другим банкам + прирост ссуд ЦБ - прирост резервов в ЦБ + проценты от произв - проценты населению - (сальдо процентов по межбанк операциям) - проценты по ссудам ЦБ

10. Модель парной линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса- Маркова.

Модель парной регрессии

Рассмотрим модели регрессии. В них присутствует объясняемая (зависимая) переменная y и набор объясняющих (независимых) переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Связь между ними выражается следующим образом: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$, где f — некоторая функция, а $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ — набор параметров. В зависимости от вида функции $f(x, \beta)$ модели делятся на линейные и нелинейные.

Рассмотрим набор двух переменных $X_t, Y_t, t = \overline{1, n}$. Можно отображать (X_t, Y_t)точками на плоскости. **Задача:** подобрать $Y = f(X)$из параметрического семейства $f(X, \beta)$ наилучшим образом описывающую зависимость Y от X.

Подобрать функцию означает выбрать β. Примером параметрического семейства является модель парной линейной регрессии: $f(X, \beta) = a + bX$.

Определим следующие меры отклонения полученных значений от реальных значений:

1. $F = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - f(X_t, \beta))^2$ — сумма квадратов отклонений.
2. $F = \sum_{t=1}^{n} |Y_t - f(X_t, \beta)|$ — сумма модулей отклонений.
3. $F = \sum_{t=1}^{n} g(Y_t - f(X_t, \beta))$, где g — мера с которой отклонение входит в F.

Метод наименьших квадратов (МНК).

Пусть $f(x, \beta)$ – линейная функция с параметрами α и β: $Y = f(X, a, b)$ = $a + bX$. Метод наименьших квадратов позволяет подобрать наилучшие параметры путем решения задачи оптимизации:

$$F = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - f(X_t, \beta))^2 \to \min$$

Записав необходимые условия экстремума(производная равна 0), и решив систему уравнений, получаем оптимальные параметры:

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t, \quad \hat{b} = \frac{n\sum X_t Y_T - \sum X_t \sum Y_t}{n\sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{Cov(X,Y)}{Vat(X)}$$

Линейная регрессионная модель с двумя переменными.

Добавим к постановке задачи статистические свойства данных. Запишем уравнение зависимости Y_t от X_t, добавив в него случайную величину ε_t. Получим регрессионное уравнение:

$$Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = \overline{1,n}.$$

В этом уравнении X_t — неслучайная детерминированная величина, называется регрессор. Y_t, ε_t — случайные величины.

Случайная ошибка может возникать:

- Если модель является упрощением действительности, и в ней опускаются некоторые параметры.
- Если возможны неточности в измерении данных, используемых в модели.

Можно перечислить основные гипотезы линейной регрессионной модели с двумя переменными:

Основные гипотезы:

1. $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = 1, ..., n,$ - спецификация модели.
2. X_t - детерминированная величина; вектор $(X_1, ..., X_n)'$ не коллинеарен вектору $i = (1, ..., 1)'$.
3. (a) $E\varepsilon_t = 0$, $E(\varepsilon_t)^2 = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - не зависит от t ($E\varepsilon = 0$, $V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$)

   (b) $E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированность ошибок для разных наблюдений.

   Часто добавляется условие:

   (c) Ошибка $\varepsilon_t, t = 1, ..., n,$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Условие **3(a)** – независимость дисперсии ошибок от номера наблюдения называется **гомоскедастичностью**, случай когда это условие не выполняется называют **гетероскедастичностью.**

Условие **3(b)** указывает на некоррелированность ошибок для разных наблюдений. Оно часто нарушается, когда имеем дело с временными рядами. В случае, когда это условие не выполняется, говорят об **автокорреляции ошибок**.

Теорема Гаусса-Маркова

В модели линейной регрессии с двумя параметрами оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$, полученные методом наименьших квадратов, имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

Исходя из теоремы, полученные МНК оценки параметров наилучшие для модели (в смысле наименьшей дисперсии). Остается оценить оставшийся параметр σ^2.

Оценка дисперсии ошибок.

Найдем значение регрессионной функции с посчитанными коэффициентами: $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$. Тогда, остатком регрессии будет называться следующая случайная величина: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

Между оценкой σ^2 и суммой квадратов ошибки регрессии e_t существует связь, называемая несмещённый оценкой дисперсии ошибок:

$$s^2 = \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

Если дисперсия ошибок σ^2 известна, то значения коэффициентов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ можно найти по формулам из теоремы Гаусса-Маркова.

На практике, как правило, σ^2 неизвестна, и, заменив σ^2 на s^2 , можем получить оценки дисперсий коэффициентов $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$\widehat{Var}(\hat{b}) = s^2 \frac{1}{\sum(X_t - \overline{X})^2} \quad \widehat{Var}(\hat{a}) = s^2 \frac{\sum X_t^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2}$$

Эти формулы используются для нахождения стандартных отклонений оценок коэффициентов регрессии: $s_{\hat{b}} = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{b})}$, $s_{\hat{a}} = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{a})}$

11. Модель множественной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса- Маркова.

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \;\; t = 1, ..., n$$

где x_{tp} — значения регрессора x_p в наблюдении t, а $x_{t1} = 1, t = 1, ..., n$.

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \;\; t = 1, ..., n$ — спецификация модели.
2. $x_{t1}, ..., x_{tk}$ — детерминированные величины. Векторы $x_s = (x_{1s}, ..., x_{ns})', s = 1, ..., k$ линейно независимы в R^n.
3. a. $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t.
   b. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ — статистическая независимость (некоррелированность) ошибок для разных наблюдений. Часто добавляется следующее условие.
   c. Ошибки $\varepsilon_t, t = 1, ..., n$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

В этом случае модель называется *нормальной линейной регрессионной.*

Метод наименьших квадратов

Целью метода является выбор вектора оценок $\widehat{\beta}$, минимизирующего сумму квадратов остатков e_t (необъясненную часть дисперсии).

$$e = y - \widehat{y} = y - X\widehat{\beta},$$
$$ESS = \sum e_t^2 = e'e \to \min_{\widehat{\beta}}$$

Выразим $e'e$ через X и β:

$$e'e = y'y - 2\widehat{\beta}'X'y + \widehat{\beta}'X'X\widehat{\beta}.$$

Необходимые условия минимума ESS получаются дифференцированием по вектору $\widehat{\beta}$

$$\frac{\partial ESS}{\partial \widehat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\widehat{\beta} = 0,$$

откуда, учитывая обратимость матрицы $X'X$ находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Теорема Гаусса-Маркова

Для модели 1-3ab оценка $\widehat{\beta}$, полученная с помощью метода наименьших квадратов, является лучшей линейной несмещенной оценкой.

Доказательство:

1) $\widehat{\beta}'$ — несмещенная оценка $\widehat{\beta}$

$E\widehat{\beta} = E[(X'X)^{-1}X'y] = (X'X)^{-1}X'Ey = (X'X)^{-1}X'E(X\beta + \varepsilon) = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \beta.$

Пусть $A = (X'X)^{-1}X'$

Тогда $\widehat{\beta} = Ay$

Пусть b — любая другая несмещенная оценка β. Тогда можно представить b в виде

$$b = (A + C)y, C\ k \times n$$

Так как b — несмещенная оценка β, то $\beta = Eb = (A + C)Ey = (A + C)E(X\beta + \varepsilon) = (A + C)X\beta + (A + C)E\varepsilon = (A + C)X\beta = (AX + CX)\beta = (I + CX)\beta \Rightarrow CX = 0$.

2) Вычислим матрицу ковариаций $\widehat{\beta}$:

$V(\widehat{\beta}) = V(Ay) = AV(y)A' = A\sigma^2 IA' = \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}$

3) $V(b) = V(\widehat{\beta}) + \sigma^2 CC', CC' \geq 0$.

$\Rightarrow V(b) \geq V(\widehat{\beta})$.

12. Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Под временным рядом понимается последовательность наблюдений значений некоторой переменной, произведенных через равные промежутки времени. Если принять длину такого промежутка за единицу времени (год, квартал, день и т.п), то можно считать, что последовательные наблюдения $x_1, ..., x_n$ произведены в моменты $t = 1, ..., n$.

Ряд x_t, $t = 1, ...n$ называется **строго стационарным** (или **стационарным в узком смысле**), если для любого m $(m < n)$ совместное распределение вероятностей случайных величин $X_{t_1}, ..., X_{t_m}$, такое же как и для $X_{t_1+\tau}, ..., X_{t_m+\tau}$, при любых $t_1, ..., t_m$ и τ, таких, что $1 \le t_1, ..., t_m \le n$ и $1 \le t_1 + \tau, ..., t_m + \tau \le n$, т.е функция плотности при сдвиге во времени не изменится

$$P\{x_{t_1}, ..., x_{t_m}\} = P\{x_{t_1+\tau}, ..., x_{t_m+\tau}\}.$$

- $E(X_t) \equiv \mu$
- $D(X_t) \equiv \sigma^2$
- $Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$ для любых t и τ.

Ряд, для которого выполнены указанные три условия, называют **стационарным в широком смысле (слабо стационарным, стационарным второго порядка** или **ковариационно стационарным)**.

Если ряд является стационарным в широком смысле, то он не обязательно является строго стационарным. В то же время, и строго стационарный ряд может не быть стационарным в широком смысле просто потому, что у него могут не существовать математическое ожидание и/или дисперсия. (В отношении последнего примером может служить случайная выборка из распределения Коши.) Кроме того, возможны ситуации, когда указанные три условия выполняются, но, например $E(X_t^3)$ зависит от t.

13. Нестационарный процесс авторегрессии – интегрированного скользящего среднего ARIMA(p,d,q).

Рассмотрим нестационарный ряд случайного блуждания. Его уравнение имеет вид: $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$. Если взять первую разность, равную $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1-L)x_t$, то уравнение сведется к следующему: $\Delta x_t = y_t = \varepsilon_t$. То есть в первых разностях ряд станет стационарным.

Рассмотрим ряд вида: $x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t$.

Его плотностью детерминированная часть (тренд) является параболической функцией времени. Очевидно, что этот ряд нестационарный. Математическое ожидание этого процесса зависит от времени.

Проверим: Приводится ли такой ряд взятием последовательных разностей к стационарному?

Если мы возьмем первую последовательную разность, то получим: $\Delta x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t - \alpha - \beta(t-1) - \gamma(t-1)^2\varepsilon_{t-1} = \beta + 2\gamma t - \gamma + (\varepsilon_1 - \varepsilon_{t-1})$.

Степень полинома, описывающего тренд, понизилась на единицу. Если провести взятие второй разности, то останется $\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = 2\gamma + (\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})$, то есть получим стационарный процесс.

НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ АБЗАЦ(Правда, видно, как в уравнение начинает "проникать"скользящее среднее. Полученный двукратным взятием разностей стационарный процесс является процессом $MA(2)$. Но, по крайне мере, взятием последовательных разностей исходный ряд с квадратичным трендом приводится к стационарному виду..**)**

Бокс и Дженкинс на основании этого свойства предложили выделить класс нестационарных рядов, которые взятием последовательных разностей можно привести к стационарному виду, а именно к виду $ARMA$.

Если ряд после взятия d последовательных разностей приводится к стационарному, то этот ряд носит название $ARIMA(p, d, q)$.

$ARIMA$ - процесс авторегрессии - интегрированного скользящего среднего. При этом p - параметр AR-части, d - степень интеграции, и q - это параметр MA-части.

В операторном виде процесс $ARIMA(p, d, q)$ записываетя как: $\alpha_p(L)\Delta^d x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Или по-другому $\underbrace{\alpha_p(L)(1-L)^d}_{\text{p+d}} x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Этот процесс x_t нестационарный, потому что здесь не выполняется условие, что все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Но, если обозначить $(1-L)^d x_t = y_t$, то y_t - это стационарный процесс.

16. Проверка гипотезы $H_0 : b = b_0$. Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии. Коэффициент детерминации.

Основные гипотезы, лежащие в основе линейной регрессионной модели (возможно из можно не писать в билете):

Основные гипотезы:

1. $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = 1, ..., n,$ - спецификация модели.
2. X_t - детерминированная величина; вектор $(X_1, ..., X_n)'$ не коллинеарен вектору $i = (1, ..., 1)'$.
3. (a) $E\varepsilon_t = 0$, $E(\varepsilon_t)^2 = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - не зависит от t ($E\varepsilon = 0$, $V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$)

   (b) $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированность ошибок для разных наблюдений.

   Часто добавляется условие:

   (c) Ошибка $\varepsilon_t, t = 1, ..., n,$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Свойства МНК-оценок

МНК-оценки коэффициентов регрессии $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ имеют совместное нормальное распределение:

$\widehat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \widehat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right)$, где $x_t = X_t - \overline{X}$, $\overline{X} = \frac{\sum X_t}{n}$

Отсюда получаем, что $\hat{b} - b \sim N(0, \sigma_{\hat{b}}^2)$, где $\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$

$\widehat{Var}(\hat{b}) = s_{\hat{b}}^2 = s^2 \frac{1}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \frac{s^2}{\sum x_t^2} \Rightarrow \frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}} \sim N(0, 1)$

Учитывая, что распределение оценки дисперсии ошибок $s^2 = \widehat{\sigma^2}$ имеет распределение:

$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$, получим

$\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2}\chi^2(n-2)} \Rightarrow$ {по определению статистики Стьюдента} $\Rightarrow t = \frac{(\hat{b} - b)/\sigma_{\hat{b}}}{s/\sigma} \sim t(n-2)$, где $t(n-2)$ — Т-статистика Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы.

Так как $\frac{\sigma_{\hat{b}}}{\sigma} = \frac{s_{\hat{b}}}{s}$получим $t = \frac{\hat{b}-b}{s_{\hat{b}}} \sim t(n-2)$ $(*)$

Аналогично показываем, что $t = \frac{\hat{a}-a}{s_{\hat{a}}} \sim t(n-2)$.

Статистику $(*)$ можно использовать для проверки гипотезы $H_0 : b = b_0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : b \neq b_0$.

Пусть H_0 верна, тогда t = \frac{\hat{b} - b}{s_{\hat{b}}} \sim t(n - 2)

Гипотеза H_0 принимается при $|t| \leq t_\alpha(n-2)$.

Другими словами:

$100\% \cdot (1-\alpha)$-ый доверительный интервал для b равен:

$\left[\hat{b} - t_e s_{\hat{b}}, \hat{b} + t_e s_{\hat{b}}\right]$, где t_e — точка t-распределения с $(n-2)$ степенями свободы при уровне значимости α.

(Хз надо ли это писать в билете) Если гипотеза нормальности ошибок не выполняется — **3(c)**, то при некоторых условиях регулярности на поведение X_t при росте n оценки $\widehat{a}, \widehat{b}$ имеют асимптотически нормальное распределение, то есть

$$\widehat{a} \to N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \widehat{b} \to N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right)$$

Коэффициент детерминации R^2

Рассмотрим вариацию значения Y_t вокруг среднего значения $\overline{Y}$: $\sum(Y_t - \overline{Y})^2$.

Разобьем вариацию на две части: объяснению и необъяснённую.

Пусть $\widehat{Y_t} = \hat{a} + \hat{b}X_t$ — предсказанные значения Y_t.

Тогда $Y_t - \overline{Y} = (Y_t - \widehat{Y_t}) + (\widehat{Y_t} - \overline{Y})$и вариация Y_t записывается в виде:

$$\sum(Y_t - \overline{Y})^2 = \sum(Y_t - \widehat{Y_t})^2 + \sum(\widehat{Y_t} - \overline{Y})^2 + 2\sum(Y_t - \widehat{Y_t})(\widehat{Y_t} - \overline{Y}) \sim TSS = ESS + RSS + 2\sum(Y_t - \widehat{Y_t})(\widehat{Y_t} - \overline{Y})$$

TSS – вся дисперсия. ESS – необъясненная часть дисперсии. RSS – объясненная часть дисперсии.

Третье слагаемое равно 0, так как

$\sum e_t(\widehat{Y_t} - \overline{Y}) = \sum e_t(\hat{a} + \hat{b}X_t - \overline{Y}) = \{x_t = X_t - \overline{X}\} = (\hat{a} + \hat{b}\overline{X} - \overline{Y})\sum e_t + \hat{b}\sum e_t x_t = 0$ (вектор остатоков регрессии e_t ортогонален константе i - единичному вектору и вектору x)

Коэффициентом детерминации называется $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}$.

$R^2 \in [0, 1]$, если $R^2 = 0$, то регрессия ничего не дает, $R^2 = 1$ — точная подгонка.

17. Статистические свойства оценок по методу наименьших квадратов параметров множественной регрессии. Коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

Модель множественной регрессии (многомерная регрессивная модель)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,n} \quad \text{или}$$
$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,n},$$

где x_{tp} — значение регрессора x_p в наблюдении t, а $x_{t1} = 1$, $t = \overline{1,n}$. С учетом этого замечания различаются модели со свободным членом и без свободного члена.

Если выполнены следующие гипотезы, то модель называется **нормальной линейной регрессионной:**

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad \overline{1,n}$ — спецификация модели;
2. $x_{t1}, ..., x_{tk}$ — детерминированные величины. Вектор $x_s = (x_{1s}, ..., x_{ns})^T$, $s = \overline{1,k}$ линейной независимые в R^n;
3. $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t;
4. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ — статистическая независимость (некоррелированность) ошибок для разных наблюдений;
5. Ошибка $\varepsilon_t, t = \overline{1,n}$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Матричный вид гипотез

Пусть y — вектор-столбец $(y_1, ..., y_n)^T$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)^T$ — вектор коэффициентов; $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)^T$ — вектор ошибок.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & ... & x_{1k} \\ ... & ... & ... \\ x_{n1} & ... & x_{nk} \end{bmatrix} - n \times k \text{ матрица объясняющих переменных.}$$

Столбцами матрицы X являются $n \times 1$ векторы регрессоров $x_s = (x_{1s}, ..., x_{ns})^T$, $s = \overline{1,k}$

1. $y = X\beta + \varepsilon$ — спецификация модели;

2. X — детерминированная матрица, имеет максимальный ранг k;
3. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0, Var(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon^{\mathbb{T}} = \sigma^2 I_n;$
4. $\varepsilon \sim N(0, \sigma I_n)$, то есть$\varepsilon$ — нормально распределенный случайный вектор со средним 0 и матрицей ковариация $\sigma^2 I_n$ (нормальная линейная регрессионная модель).

Теорема Гаусса-Маркова для множественной регресии

Предположим, что выполнены гипотезы 1-3.

Тогда оценка методом наименьших квадратов $\widehat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T y$ является наиболее эффективной (в смысле наименьшей дисперсии) оценкой в классе линейных (по y) несмещённый оценок (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE).

Статистические свойства МНК оценок

Введем вектор прогнозируемых значений $\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T y$

Введем вектор остатков регрессии:

$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)y = My,$ где $M = (I - X(X^T X)^{-1} X^T) = (I - N).$

Вычислим мат. ожидание и матрицу ковар. e:

$\mathbb{E}(e) = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)\mathbb{E}(y) = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)X\beta = X\beta - X\beta = 0.$

$Var(e) = Var(My) = MVar(y)M^T = M\sigma^2 IM^T = \sigma^2 M$

Оценка дисперсии ошибок:

$\mathbb{E}(e^T e) = tr(Var(e)) = \sigma^2 tr(I_n - N) = (n-k)\sigma^2$ (tr — след матрицы).

Следовательно $s^2 = \widehat{\sigma}^2 = \frac{e^T e}{n-k} = \frac{\sum e_t^2}{n-k}$ — несмещенная оценка дисперсии ошибок, то есть $\mathbb{E}s^2 = \sigma^2$.

Распределение:

$\frac{e^T e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ или $(n-k)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$

Оценки \hat{\beta} и s^2 независимы в предположении нормальной линейной множественной регрессионной модели

$\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \beta + A\varepsilon$

Вектор $\hat{\beta}$ и e имеют совместное многомерное нормальное распределение $\Rightarrow$ нужно доказать их некоррелированность

$AM = (X^TX)^{-1}X^T(I - X(X^TX)^{-1}X^T) = 0$

Тогда (так как $\mathbb{E}e = 0$): $Cov(\hat{\beta}, e) = \mathbb{E}((\hat{\beta} - \beta)e^T) = \mathbb{E}(A\varepsilon\varepsilon^T M) = \sigma^2 AM = 0$

Так как s^2 является функцией $e \Rightarrow$ оценки $\hat{\beta}$ и s^2 независимы.

Коэффициент детерминации R^2 и скорректированный коэффициент детерминации R^2_{adj}

Разобьем вариацию $\sum(y_t - \overline{y})^2$ на две части: объясняемую и не объясняемую.

$\sum(y_t - \overline{y})^2 = \sum(y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum(\hat{y}_t - \overline{y})^2 + 2\sum(y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \overline{y})$

Тоже самое в векторной форме:

$(y - \overline{y}i)^T(y - \overline{y}i) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) + (\hat{y} - \overline{y}i)^T(\hat{y} - \overline{y}i) + 2(y - \hat{y})^T(y - \overline{y}i)$, где i — единичный вектор.

Третье слагаемое равно нулю:

$(y - \hat{y})^T(y - \overline{y}i) = e^T(X\hat{\beta} - \overline{y}i) = e^TX\hat{\beta} - \overline{y}e^Ti = 0$, так как $e^TX = 0$, $e^Ti/n = 0$.

Поэтому: $||y - \overline{y}i||^2 = ||y - \hat{y}||^2 + ||\hat{y} - \overline{y}i||^2 (TSS + ESS + RSS)(*)$

TSS – вся дисперсия. ESS – необъясненная часть дисперсии. RSS – объясненная часть дисперсии.

Положим: $y_* = y - \overline{y}i, \quad \hat{y_*} = \hat{y} - \overline{y}i \Rightarrow y_*^T y_* = e^Te + \hat{y_*}^T\hat{y_*}$

Коэффициентом детерминации называют $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{e^Te}{y_*^Ty_*} = \frac{\hat{y_*}^T\hat{y_*}}{y_*^Ty_*}, \quad R^2 \in [0, 1]$.

R^2 корректно определен, только если вектор $i = (1, ..., 1)^T$ принадлежи линейной оболочке векторов $x_1, ..., x_k$.

Свойства R^2:

1. R^2 возрастает при добавлении еще одного регрессора.
2. R^2 изменяется даже при простейшем преобразовании зависимой переменной, поэтому сравнивать по значению R^2 можно только регрессии с одинаковыми зависимыми переменными.

Попыткой устранить эффект, связанный с ростом R^2 при возрастании числа регрессоров, является коррекция R^2 на число регрессоров.

Скорректированным (adjusted) R^2 называется

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{e^T e/(n-k)}{y_*^T y_*/(n-1)}$$

Заметим, что нет никакого существенного оправдания такого способа коррекции (то есть можно по другому корректировать, главное устранять недостаток возрастания при увеличении числа регрессоров).

Свойства скорректированного R^2

1. $R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$
2. $R^2 \geq R^2_{adj}, k > 1.$
3. $R^2_{adj} \leq 1$, но может принимать значения < 0.

18. Проверка гипотезы о линейном ограничении общего вида $H_0 : H\beta = r$.

Линейное ограничение общего вида $\mathrm{H}_0 : H\beta = r$. Пусть H — $q \times k$ матрица, β — $k \times 1$ вектор коэффициентов, r — $q \times 1$ вектор.

Число ограничений не превосходит числа параметров и ограничения линейно независимы, т.е. $q \le k$ и матрица H имеет максимальный ранг: $\mathrm{rank}(H) = q$.

Пример. В качестве примера рассмотрим следующие матрицы H, r для $k = 3, q = 2$:

$$H\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = r.$$

Это условие соответствует системе двух линейных ограничений

$$\begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 - \beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$F = \frac{(H\widehat{\beta} - r)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\widehat{\beta} - r)/q}{e'e/(n-k)} \sim F(q, n-k).$$

Если справедлива гипотеза $\mathrm{H}_0 : H\beta - r = 0$, то статистика F не должна принимать слишком больших значений, а именно, с 95%-вероятностью $F < F_c(q, n-k)$, где $F_c(q, n-k)$ есть 95%-квантиль распределения Фишера $F(q, n-k)$.

Другой вид F-статистики:

$$F = \frac{(\widehat{\beta} - \beta)'H'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}H(\widehat{\beta} - \beta)/q}{e'e/(n-k)} \sim F(q, n-k)$$

Условие $F < F_c(q, n-k)$ задает 95%-*доверительную область* для коэффициентов β (выпуклую).

В случае $H = I$ статистика F выглядит следующим образом:

$$F = \frac{(\widehat{\beta} - \beta)'(X'X)(\widehat{\beta} - \beta)/k}{e'e/(n-k)} \sim F(k, n-k).$$

$\mathrm{H}_0 : \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = ... = \beta_k = 0$. Гипотеза является, конечно, частным случаем общей линейной гипотезы $H\beta = r$.

$$F = \frac{(e^{\cdot\prime} e^{\cdot} - e'e)/q}{e'e/(n-k)} = \frac{(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/q}{\mathrm{ESS_{UR}}/(n-k)} \sim F(q, n-k).$$

Здесь $\mathrm{ESS_R}$ — сумма квадратов остатков "короткой"(*restricted*) регрессии; $\mathrm{ESS_{UR}}$ — сумма квадратов остатков "длинной"(*unrestricted*) регрессии.

F-статистику можно выразить через коэффициенты детерминации R^2 для "короткой"и "длинной"регрессий:

$$F = \frac{(R^2_{\mathrm{UR}} - R^2_{\mathrm{R}})/q}{(1 - R^2_{\mathrm{UR}})/(n-k)} \sim F(q, n-k)$$

При $F < F_c(q, n-k) \Rightarrow \mathrm{H}_0$ о "короткой"регрессии принимается, т.е. использование q дополнительных регрессоров ничего не добавляет к качеству оценивания модели.

19. Модели процессов авторегрессии и скользящего среднего: AR(p), MA(q) и ARMA(p,q). Условия стационарности этих процессов.

Процесс авторегрессии порядка p (**AR(p)**) определяется соотношениями

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad a_p \neq 0,$$

где ε_t - процесс белого шума с $D(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.

$Cov(X_{t-s}, \varepsilon_t) > 0$ для всех $s > 0$.

При рассмотрении процессов авторегрессии и некоторых других моделей удобно использовать **оператор запаздывания L (lag operator)**, который воздействует на временной ряд и определяется соотношением

$$LX_t = X_{t-1}$$

Если оператор запаздывания применяется k раз, что обозначается как L^k, то это дает в результате

$$L^k X_t = X_{t-k}$$

Тогда процесс авторегрессии p-го порядка перепишется в виде:

$$a(L)X_t = \varepsilon_t$$

где

$$a(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + ... + a_p L^p).$$

Для того, чтобы такой процесс был стационарным, все корни алгребраического уравнения $a(z) = 0$ должны лежать вне единичного круга, т.е. $|z| > 1$.

Процесс скользящего среднего порядка q (**MA(q)**) определяется соотношениями:

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + ... + b_q\varepsilon_{t-q} + \mu, \quad b_q \neq 0,$$

Используя оператор запаздывания L, $MA(q)$ можно переписать в следующем виде:

$$X_t - \mu = b(L)\varepsilon_t,$$

где $b(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + ... + b_qL^q$.

Всякий стационарный процесс $AR(p)$ эквивалентен $MA(\infty)$.

Если корни $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга, то ряд обратим, т.е. $MA(q)$ эквивалентен $AR(\infty)$.

Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего (процесс авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего) (**ARMA(p,q)**) определяется соотношениями:

$$X_t = a_1X_{t-1}+a_2X_{t-2}+...+a_pX_{t-p}+\epsilon_t+b_1\epsilon_{t-1}+...+b_q\epsilon_{t-q}, \quad a_p \neq 0,\ \ b_q \neq 0,\ \ \epsilon_t - \textit{белый шум}$$

В операторной форме это соотношение имеет вид

$$a(L) = 1 - (a_1L + a_2L^2 + ... + a_pL^p)$$
$$b(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + ... + b_qL^q$$
$$a(L)X_t = b(L)\epsilon_t,$$

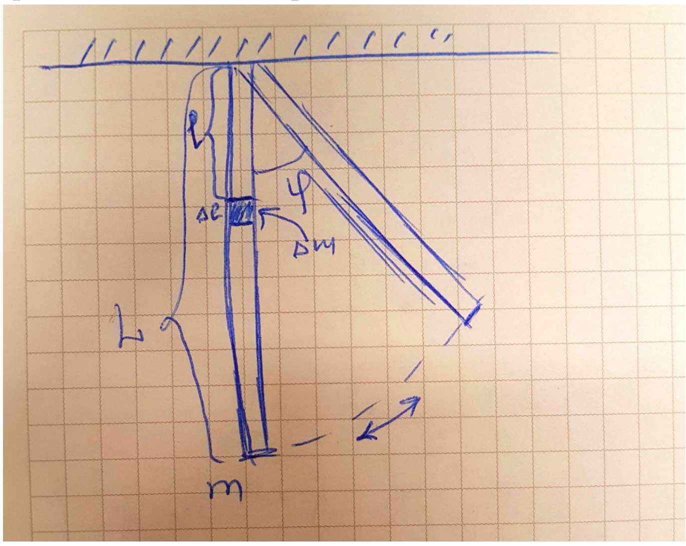
т.е. $a(L)$ и $b(L)$ имеют тот же вид, что и в определенных ранее моделях $AR(p)$ и $MA(q)$.

Процесс стационарен, если все корни уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$

Если все корни уравнения $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ **(условие обратимости)**, то существует эквивалентное представление процесса X_t в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка $AR(\infty)$.

Билет 20
Напишите уравнение Лагранжа для массивного стержня длины L и массы m с закрепленным концом, колеблющегося в вертикальной плоскости, и оцените частоту его колебаний.

Уравнение Лагранжа:
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \forall i = 1, ..., N$$
где q_i – обобщенные координаты точек тела. Соответственно $L(q, \dot{q}, t)$ -ф-я Лагранжа.



Разобьем стержень на малые части массой Δm длиной Δl, $\Delta m = \rho S \Delta l$. Тогда каждую часть можно представить как математический маятник, и для него:

$$U = \Delta mgh = \Delta mg(l - lcos\varphi)$$

И соответственно ф-я Лагранжа:

$$\Delta L = \frac{\Delta m(l\dot{\varphi})^2}{2} - \Delta mgl(1 - cos\varphi) = \rho S\Delta l\ (\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - cos\varphi))$$

Чтобы получить ф-ю Лагранжа для целого стержня, надо просуммировать ΔL по всем частям (т.е. проинтегрировать):

$$L = \int_0^l \rho S\ (\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - cos\varphi))dl = \rho S\ \left(\frac{L^3}{3 \cdot 2}\frac{\dot{\varphi}^2}{} - \frac{gL^2}{2}(1 - cos\varphi)\right) = \frac{m(L\dot{\varphi})^2}{3 \cdot 2} - \frac{mgl}{2}(1 - cos\varphi)$$

Подставляем это в уравнение Лагранжа, получаем:

$$m\frac{L^2}{3}\ddot{\varphi} = -mg\frac{L}{2}sin\varphi$$

Отсюда ур-е колебания маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}sin\varphi = 0$$

Частота колебаний $\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$

Билет 22
Покажите, что функция $(\frac{e^{x/x^*}}{x/x^*})^m(\frac{e^{y/y^*}}{y/y^*})^\alpha$ является первым интегралом для системы ОДУ Лотки-Вольтерра $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$, $\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my$, описывающей сосуществование хищников y и жертв x, где x^*, y^* - стационарное решение этой системы.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx(t)}{dt} &=& f_1(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &=& f_2(t, x(t), y(t)). \end{array} \quad (1)$$

Определение 1.
Первым интегралом нормальной системы (1) называется функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой системы (1).

Утверждение 1.
Функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$ является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (1) равна нулю:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t), y(t))\bigg|_{(1)} = 0.$$

Система хищник-жертва. Размножение жертв ограничивается давлением на них со стороны хищников. Размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв):

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} &=& \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &=& k\beta xy - my. \end{array} \quad (2)$$

- $x(t)$ - численность жертв;
- $y(t)$ - численность хищников;
- α - коэффициент естественного прироста жертв;
- m - коэффициент естественной смертности хищников;
- $V(x) = \beta x$ - количество (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k-я часть полученной биомассы энергии расходуется хищником на воспроизводство, остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничей активности. Функцию $V(x)$ обычно называют трофической функцией или функциональным откликом хищника на плотность популяции жертвы.

$x^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \alpha/\beta$ - стационарное решение системы (2) (проверяется подстановкой). Докажем, что функция $(\frac{e^X}{X})^m(\frac{e^Y}{Y})^\alpha$, где $X = x/x^*$, $Y = y/y^*$ является первым интегралом системы (2). Продифференцируем эту функцию по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\frac{e^X}{X})^m(\frac{e^Y}{Y})^\alpha] = m(\frac{e^X}{X})^{m-1} \cdot \frac{e^X\dot{X}X - e^X\dot{X}}{X^2} \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha + \alpha(\frac{e^Y}{Y})^{\alpha-1} \cdot \frac{e^Y\dot{Y}Y - e^Y\dot{Y}}{Y^2} \cdot (\frac{e^X}{X})^m =$$

$$= (\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha \cdot [m\dot{X}(1 - \frac{1}{X}) + \alpha\dot{Y}(1 - \frac{1}{Y})] = \underbrace{(\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha}_{A} \cdot [m\dot{X} + \alpha\dot{Y} - (m\frac{\dot{X}}{X} + \alpha\frac{\dot{Y}}{Y})] =$$

$$= \left\{X = x/x^*, Y = y/y^*, x^* = \frac{m}{k\beta}, y^* = \alpha/\beta\right\} = A \cdot [\dot{x}k\beta - \dot{y}\beta - (m\frac{\dot{x}}{x} + \alpha\frac{\dot{y}}{y})] = \left\{(2)\right\} =$$

$$= A \cdot [k\beta(\alpha x - \cancel{\beta xy}) + \beta(\cancel{k\beta xy} - my) - (\cancel{\alpha m} - \beta my + \alpha k\beta x - \cancel{\alpha m})] =$$

$$= A \cdot [k\beta\alpha x - \beta my - (-\beta my + \alpha k\beta x)] = 0.$$

Из утверждения 1 следует, что функция $(\frac{e^X}{X})^m(\frac{e^Y}{Y})^\alpha$ является первым интегралом системы (2). Уравнение $(\frac{e^X}{X})^m(\frac{e^Y}{Y})^\alpha = C$ описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, соответствующих фазовым траекториям периодических решений системы (2). Заметим, что при увеличении C амплитуды колебаний x и y возрастают (рисунок 1).

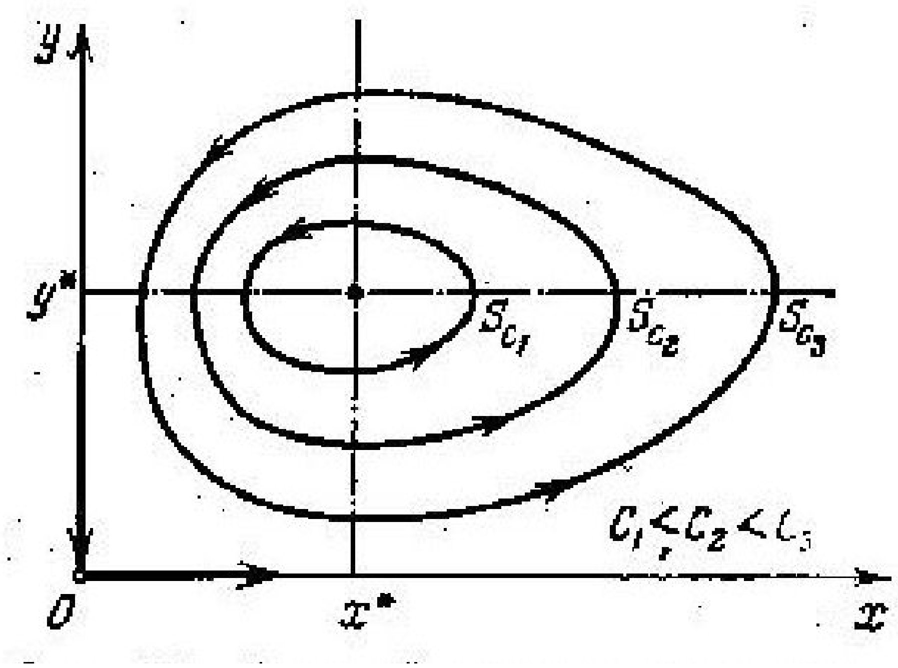


Рис. 1. *Фазовый портрет*

23. Сформулируйте необходимые и достаточные условия продуктивности неотрицательной, неразложимой матрицы в модели Леонтьева и докажите, что матрица является продуктивной или не является таковой.

Определение 1. Квадратная матрица $A(N \times N)$ называется *разложимой*, если одновременной перестановкой строк и столбцов её можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

где $A_1(m \times m)$, $A_3((N-m) \times (N-m))$, $m < N$.

Утверждение 1. Если матрица A разложима, то и матрица A^2 разложима, причём

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & \tilde{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$$

Теорема (Фробениуса-Перрона). Если неотрицательная матрица A неразложима, то у неё существует собственное число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ справедливо $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый собственный вектор-столбец $\mathbf{x}_A$, $(A\mathbf{x}_A = \lambda_A\mathbf{x}_A)$, и левый собственный вектор-строка $\mathbf{y}_A$, $(\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A)$, положительны.

Собственное число λ_A называют *фробениусовым числом*, а векторы $\mathbf{x}_A$, y_A – правым и левым *фробениусовыми векторами*.

Пусть $r = \min r_i$, $R = \max r_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$.

Утверждение 3. Если A неотрицательная неразложимая матрица, то при $r < R$ ее фробениусово число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Доказательство Пусть вектор $\mathbf{y}_A$ таков, что $\sum_{i=1}^{N} y_A^i = 1$. Умножим равенство $\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A$ справа на вектор-столбец $\mathbf{e} = (1, 1, ..., 1)^T$. Получим $\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} y^i = \lambda_A \sum_{i=1}^{N} y^i = \lambda_A$. Поменяв в левой части равенства порядок суммирования, имеем $\sum_{i=1}^{N} y^i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{i=1}^{N} y^i r_i = \lambda_A$. Строгие неравенства следуют из того, что вектор $\mathbf{y}_A$ положителен и $r < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$

Определение 3. Неотрицательную матрицу A назовём *продуктивной*, если существует неотрицательная матрица $(E - A)^{-1}$.

Утверждение 4. Неотрицательная неразложимая матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда её фробениусово число $\lambda_A < 1$.

Доказательство: *Достаточность*. Пусть $\lambda_A < 1$. Если $\mathbf{x}_A$ правый фробениусов вектор, то $A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A$. Отсюда и из положительности компонент вектора $\mathbf{x}_A$ следует, что $A^k \to 0$.

$$\begin{gathered} E - A^k = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ E = \lim_{k\to\infty} (E - A^k) = (E - A) \lim_{k\to\infty} (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ E = (E - A)(E - A)^{-1} = (E - A) \cdot const, \\ \text{где } const = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} \end{gathered}$$

Необходимость. Пусть матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$. Для вектора $\mathbf{p} > 0$ решение $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{p}$ существует и $\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{p} > 0$. Очевидны соотношения $\lambda_A \mathbf{y}_A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A A\mathbf{x} = \mathbf{y}_A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) < \mathbf{y}_A \mathbf{x}$. Отсюда и из положительности числа $\mathbf{y}_A \mathbf{x}$ следует неравенство $\lambda_A < 1$∎

Задача.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы определить продуктивна матрица A или нет мы должны найти её фробениусово число λ_A. В случае, если $\lambda_A < 1$, матрица A будет продуктивной, иначе – нет.

$r_1 = 0,7$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0,9$, значит $r = 0,7$, $R = 1$. Поскольку $r < R$, то $\lambda_A < R = 1$. Ответ: Матрица A продуктивна.

24. Опишите математическую модель коллективного поведения П.С. Краснощёкова и рассмотрите случай, когда у всех членов коллектива коэффициенты индивидуализма равны нулю (стадо).

Пусть ЛПР (i = 1, N) может принять одно из двух S = 1,2 альтернативных решений.

Пусть μ_i есть коэффициент индивидуализма (самостоятельности) i-ого ЛПР. При $\mu = 1$ данное ЛПР абсолютно самостоятельно, а при $\mu = 0$ – это абсолютный конформист, меняющий решения в угоду любому чужому мнению.

α_j - априорная вероятность принятия индивидом j решения "1"

Апостериорная вероятность (вероятность после общения с коллективом) того, что i-ый индивид примет решение с номером "1" равно $p_i \in [0,1]$, а с номером "2" равно $1 - p_i$.

Модель Краснощекова описывает способ вычисления апостериорной вероятности принятия решения $s = 1$ с учетом коэффициента индивидуализма:

$$p_i = \alpha_i \mu_i + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j,$$

В этой формуле $\lambda_{ij} \in [0,1]$ – вероятность того, что i-е ЛПР примет решение s = 1 после общения с j-м ЛПР, при условии, что j-е ЛПР придерживается s = 1-й альтернативы.

Модель Краснощекова в матричной форме:

$$P = AM + (E - M)\Lambda P$$

В случае "стада" ($\mu_i = 0$ для всех i) $M = 0$. Таким образом, $(E - \Lambda)P = 0$. То есть определитель матрицы $E - \Lambda$ равен нулю, а у этого уравнения существует бесконечное число решений. Однако, стадо движется не хаотично: все p_i равны между собой, то есть индивиды подражают друг другу:

$$p_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j$$

При этом, если в коллективе появился индивид, у которого $\mu_k > 0$, то решения модели становится единственным: $p_i = \alpha_k$, то есть все копируют поведение $k-$того индивида.

25. Популяционные игры. Равновесие Нэша и строгое равновесие.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе
индивидуумов.

$$G =< J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega >,$$

- J - множество стратегий участников игры;
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распределение игроков по стратегиям;
- $\Pi = \{\pi | \pi_j > 0 \sum\limits_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс;
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды);

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что
всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом
на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J \ \ (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in Arg \max_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega).$$

Если $f_j(\pi, \omega) = \alpha(\pi, \omega)\overline{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, т.е. функции выигрыша разложимы, то: $\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in Arg \max\limits_{i \in J} \overline{f}_i(\pi^*)$.

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^*, что

$\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^*, \exists \overline{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \overline{\lambda}(\pi)) \ \ f_{\pi^*}(\lambda \pi + (1 - \lambda)\pi^*, \omega) > f_\pi(\lambda \pi + (1 - \lambda)\pi^*, \omega)$, где $f_\pi(\pi', \omega) = \sum\limits_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ - средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π, если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям.

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^*, внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^*.

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша.

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.
Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{J\setminus j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j \equiv s$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^*, что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственно лучшим ответом на это распределение:

$\exists \varepsilon > 0, \exists j \in J : \pi_j^* = 1,$ и $\forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega : f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$

Всякое строгое равновесие является ЭУС.

26. Модель динамики репликаторов.

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегии родителей и сохраняют их в течение всего времени жизни.

Пусть взаимодействие между индивидуумами популяции в каждый период времени описывается популяционной игрой $G =< J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0)$. Выигрыш $f_j(\pi, N)$ представляет собой сумму средней рождаемости $fer_j(\pi, N)$ и выживаемости $\nu(\pi, N)$ для индивидуумов, использующих стратегию j, если общая численность популяции равна N, а распределение по стратегиям - π. Обозначим $N_j(t)$ число особей, использующих в период t стратегию $j \in J$. Тогда динамика такой популяции описывается системой

$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t))$ (1)

Таким образом, состояние системы в каждый период времени полностью описывается $\overline{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно определяется распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t) | N(t))_{j \in J}$. Отметим, что в случае, когда $f_j(\pi) = \alpha(\pi, N) \overline{f}_j(\pi)$ из системы (1) вытекает автономная модель динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t) \overline{f}_j(\pi(t)) / \sum_{i \in J} \pi_i(t) \overline{f}_i(\pi(t)), j \in J.$$

27. Теоремы о связи равновесий Нэша и строгих равновесий с устойчивыми точками модели динамики репликаторов.

$G =< J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 >$ - популяционная игра.

$f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j, π - распределение по стратегиям, N - общая численность популяции.

$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t))$ - динамика такой популяции.

Состояние системы в каждый период полностью хар-ся вектором $\overline{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно определяется распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = \frac{N_j(t)}{N(t)})_{j \in J}$.

$N_s = \pi_s N$ - численное использование стратегии s.

(*) $N_s(t+1) = N_s(t) f_s(\pi(t), N(t)), t = 1, 2, ...$, где $f_s(\pi, N) = fer_s(\pi, N) + \nu_s(\pi, N)$ - функция приспособленности стратегии s.

Теорема 3.1 (о связи р. Нэша и уст. точек МДР). $\sqsupset$ f_s разложима: $f_s(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \overline{f}_s(\pi) + b(\pi, \omega), a(\pi, \omega) \geq 0 \Rightarrow$

1) $\forall$ уст. по Ляпунову распределение π^* системы (*) является р. по Нэшу популяционной игры $\overline{G} =< S, \overline{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi >$

2) если начальное распределение $\overline{N}(0) > 0$ и для траектории $\{\overline{N}(t)\}$ $\exists \lim\limits_{t \to \infty} \pi(t, \overline{N}(0)) = \pi^*$, то π^* является р. Нэша указанной популяционной игры.

Теорема 3.2 (об асимптотически уст. ЭУС). Пусть в усл. т. 3.1 π^* - ЭУС для игры $\overline{G} \Rightarrow \pi^*$ - асимптотически уст. распределение системы (*).

Теорема 3.3 (о связи множеств доминирующих стратегий с динамикой поведения). Пусть S - множество строго доминирующих стратегий в игре $G' =< S, ln\overline{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi >$. Тогда для $\forall s \in S$ и $\forall \overline{N}(0) > 0$ $\lim\limits_{t \to \infty} \pi_s(t, \overline{N}(0)) = 0$ на соответствующей траектории системы (*).

28. Модель взаимодействия родственников. Утверждение о доминирующей стратегии. Распространение альтруизма и кооперации.

Пусть взаимодействие в популяции характеризуется множеством стратегий S и функциями приспособленности $f_s(\pi), s \in S$. Главная особенность данной модели – индивидуум способен различать сибсов (родных братьев или сестер) среди других членов популяции и выбирать стратегию в зависимости от этого признака.

Полная стратегия (s, s') включает:

- Компоненту s, применяемую к сибсам
- Компоненту s' для прочих индивидуумов

В данный период времени индивидуум с некоторой интенсивностью $\lambda_r \in (0,1)$ взаимодействует с сибсами, а с интенсивностью $1 - \lambda_r$ – с остальными индивидуумами из популяции. Общая приспособленность аддитивно зависит от результатов взаимодействия с родственниками и с остальной частью популяции:

$$\bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi'),$$

- $f_s^r(s)$ – функция, описывающая результаты взаимодействия с сибсами
- π' - распределение по компоненте s'
- Предполагается, что все сибсы применяют одну (унаследованную) стратегию

Таким образом, взаимодействие характеризуется популяционной игрой:

$$\bar{G} =< \bar{S} = \{(s, s') \in S \times S\}, \bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi') >,$$

где $\bar{\pi}$ – распределение по полным стратегиям.

Теорема 1.

Всякая стратегия (s, s'), в которой $s \notin \underset{i}{\mathrm{Argmax}}\, f_i^r(i)$, строго доминируется стратегией (s^*, s'), где $s^* \in \underset{i}{\mathrm{Argmax}}\, f_i(i)$. Распределение $\bar{\pi}$ является равновесием Нэша в том и только том случае, если для всех указанных неоптимальных стратегий $\pi_{ss'}$=0, а соответствующие распределение π' является равновесием Нэша для игры $< S, f_{s'}(\pi') >$.

Таким образом, в отношениях типа “дилеммы заключенного” сибсы используют кооперативную стратегию применительно друг к другу.

Чтобы объяснить распространение альтруистического поведения, рассмотрим следующую модификацию модели.

Если отказаться от предположения об одинаковом состоянии сибсов и считать, что они могут оказаться в разных ролях (например, доминирующей и подчиненной), а стратегия и функция приспособленности могут зависеть от роли, то полная стратегия в отношении родственников задается парой $s = (s_\alpha, s_\beta) \in S \times S$.

В результате исключения строго доминируемых стратегий остаются лишь стратегии $s^* = (s_\alpha^*, s_\beta^*) \to \max\limits_{(s_\alpha, s_\beta)} (f^\alpha(s) + f^\beta(s))$, обеспечивающие максимум суммарной приспособленности.

На основании теоремы 1 можно сделать вывод, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях ведет к формированию поведения, максимизирующего суммарную приспособленность сибсов.

Кооперация и альтруизм.

Дилемма заключенного:

Два игрока, у каждого две стратегии: кооперативная (К) и эгоистичная (Э). При любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия. Суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно.

Пример:

	К	Э
К	(5;5)	(1;6)
Э	(6;1)	(2;2)

В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша, которая соответствует эгоистичному поведению и является решением по доминированию. В реальности игроки часто ведут себя кооперативно.

Еще в больше степени отклоняется от максимизации индивидуальной приспособленности альтруистическое поведение (А – альтруистическое, Э – эгоистичное).

	А	Э
А	(5;5)	(1;10)
Э	(10;1)	(2;2)

Здесь альтруистическое поведение одного из партнеров в сочетании с эгоистичным поведением другого соответствует максимизации суммарной приспособленности. При этом альтруист получает меньше своего гарантированного выигрыша, который он мог бы получить в равновесии Нэша.

Пример кооперации:

Охота хищников, эгоисты экономят затраты в ущерб общей эффективности.

Пример альтруизма:

Альтруизм родителей по отношению к детям.

Билет 29
Многоуровневая модель налоговой инспекции.

В базовой модели налоговой инспекции с учетом коррупции предполагалось, что инспекторы и налогоплательщики максимизируют ожидаемые доходы, проверка требует фиксированных издержек и всегда верно определяет категорию проверяемого агента. Однако инспектор, обнаруживший факт уклонения, может быть подкуплен пойманным субъектом. Величина взятки лежит между максимальной приемлемой для плательщика и минимальной приемлемой для инспектора. Для устранения коррупции руководство проводит ревизии: перепроверяет некоторых инспекторов и увольняет скрывших уклонение от уплаты налогов. Стратегия организации инспекции заключается в определении вероятностей проверок и ревизий при фиксированных затратах на одну проверку. Организатор инспекции максимизирует чистый налоговый доход.

В модели предполагается способность центра контролировать фактическую частоту проверок без проведения ревизий. Также есть проблема возможной нехватки честных ревизоров.

Для устранения различных ограничений используется иерархическая контролирующая структура (она и описана ниже), подавляющая коррупцию на всех уровнях с привлечением малого числа честных инспекторов. Предполагается, что в распоряжении организатора инспекции есть доверенные лица, которые проводят проверки на верхнем уровне и всегда проверяют правильно, но стоимость их работы очень высока. Также организатор может привлекать для проверок неограниченное кол-во рациональных инспекторов, готовых брать взятки, если им это выгодно. Организатор определяет кол-во уровней инспекции, вероятность проведения проверки каждым уровнем и зарплаты рациональных инспекторов.

Базовая модель. Формализация задачи.

- Рассматривается фиксированное число N агентов уровня 0 (налогоплательщиков).
- Для каждого из них определен возможный набор действий (налоговых платежей) T_0. Каждое действие t_0 характеризуется затратами агента. Оптимальное с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой случайной величины (дохода) $I \in [I_{\min}, I_{\max}]$ (например, $t_0^*(I)$ – заданное налоговое правило). $t_0 \in [t_{\min}, t_{\max}]$, где $t_{\min} = t_0^*(I_{\min})$, $t_{\max} = t_0^*(I_{\max})$.
- Независимые и одинаково распределенные случайные величины I имеют функцию распределения $F(I)$, известную всем участникам инспекции.
- Для проведения инспекции могут использоваться 2 типа сотрудников:
  - доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки.
  - любое необходимое число рациональных инспекторов, максимизирующих свой ожидаемый доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.
- Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение случайного фактора I наблюдается только действующим на нижнем уровне агентом.

Базовая модель. Задачи с фиксированными затратами и штрафами

Контролирующая иерархическая структура строится следующим образом:

- Инспекторы первого уровня проверяют агентов уровня 0 с вероятностью $p_1(t_0)$.
- Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого уровня выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $f_0 > 1$.
  Стоимость одной проверки на этом уровне составляет c_1.
- Инспектор первого уровня может вступить в сговор с проверяемым агентом. Для предотвращения коррупции организуется проверка 2-го уровня.
- Вероятность проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов уровней 0 и 1.
- ...
- На верхнем уровне k честными инспекторами осуществляется проверка с вероятностью $p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$.
- Если проверка уровня l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты нижестоящих уровней r $(r = 0, 1, \dots, l-1)$ в этой цепочке проверок платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$.

Замечание 1

В соответствии с нашим подходом, целью инспекции не является выявление коррупции (поскольку это сложно реализуемо и затратно). Вместо этого предлагается предотвратить отклонение от честного поведения на каждом уровне.

Стратегия инспекции P включает:

- Количество уровней k
- Вероятности проверок $p_1(t_0), \dots, p_k(t_0, \dots, t_{k-1})$.

Следующие параметры заданы экзогенно в этой модели:

- Штрафные коэффициенты $f_0, \dots, f_{k-1}$
- Расходы на проверки $c_1, \dots, c_k$.

Задача

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.

Билет 30. Оптимальная стратегия проверок при фиксированных затратах на проверки и штрафах.

Рассматривается фиксированное число N агентов уровня 0 (налогоплательщиков). Для каждого из них опрелен возможный набор действий (налоговых платежей) T_0. Каждое действие t_0 характеризуется затратами агента. Оптимальное с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой случайной величины (дохода) $I \in [I_{min}, I_{max}]$ (например, $t_0^*(I)$ - заданное налоговое правило). $t_0 \in [t_{min}, t_{max}]$, где $t_{min} = t_0^*(I_{min}), t_{max} = t_0^*(I_{max})$.

Независимые и одинаково распределенные случайные величины I имеют функцию распределения F(I), известную всем участникам инспекции. Для проведения испекции могут использоваться 2 типа сотрудников:
доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки,
любое необходимое число рациональных инспекторов, максимизирующих свой ожидаемый доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.

Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение случайного фактора I наблюдается только действующим на нижнем уровне агентом.

Контролирующая иерархическая структура строится следующим образом:

- Инспекторы первого уровня проверяют агентов уровня 0 с вероятностью $p_1(t_0)$;
- Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого уровня выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I)), f_0 > 1$. Стоимость одной проверки на этом уровне составляет c_1;
- Инспектор первого уровня может вступить в сговор с проверяемым агентом. Для предотвращения коррупции организуется проверка 2 уровня;
- Вероятность проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов уровней 0 и 1;
- ...;
- На верхнем уровне k честными инспекторами осуществляется проверка с вероятностью $p_k(t_0, t_1, ..., t_{k-1})$;
- Если проверка уровня l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты нижестоящих уровней r в этой цепочке платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$.

В связи с нашим подходом, целью инспекции не является выявление коррупции (это сложно реализруемо и затратно). Вместо этого предлагается предотвратить отклонение от честного поведения на каждом уровне.

Стратегия инспекции P включает:
количество уровней k, вероятности проверок $p_1(t_0), ..., p_k(t_0, t_1, ..., t_{k-1})$.

Следующие параметры заданы экзогенно в этой модели:
штрафные коэффициенты $f_0, ..., f_{k-1}$, расходы на проверки $c_1, ..., c_k$.

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.

Рассмотрим коалицию C_l, включающую некоторое количество агентов уровня 0 и инспекторов уровней 1,...,l,l<k, проверяющих работу агентов из этой коалиции. Стратегия C_l

задается функциями $t_0(I), ..., t_l(I)$, определяющими сообщения уровней i=0,..,l в случае проверки какого-либо агента уровня 0 из этой коалиции.

Определение. Назовем стратегию P устойчивой к отклонению коалиции C_l, если суммарный выигрыш ее членов достигает максимума при честном поведении, т.е.:

$$t_0(I) = t_0^*(I), t_r(I) = t_0^*(I), r = 1, ..., l,$$

при условии честного поведения агентов верхних уровней l+1,..,k-1.

Назовем стратегию P устойчивой к коалиционным отклонениям, если это условие выполнено для всех l=1,..,k-1.

При честном поведении ожидаемые затраты на одного агента составят:

$$\int_{I_{min}}^{I_{max}} (p_1(P,I)(c_1 + p_2(P,I)(c_2 + ... + p_{k-1}(P,I)(c_{k-1} + p_k(P,I)c_k)...)dF(I)$$

где $p_i(P,I) = p_i(t_0^*(I), ..., t_0^*(I))$.

Утверждение 1. Оптимальные вероятности проверок в стратегии, устойчивой к коалиционным отклонениям, удовлетворяют условиям

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, p_s(t_0, t_1, ..., t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-2} f_i}$$

для любых $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{s-1} < t_{max}, s = 2, ..., k$.

Теперь для заданной стратегии P рассмотрим некооперативное СПР и определим условия существования СПР, соответствующего честному поведению на всех уровнях 0,1,...,k-1.

- Рассмотрим случай, когда на каждом уровне $s \leq l-1$ отклонение уровня 0 не было полностью выявлено ($t_{l-1} < t_0^*$).
- При каких условиях возможен взаимовыгодный сговор агентов уровней 0,1,..,l, если агенты верхних уровней действуют честно?

Сговор, выгодный для всех агентов 0,1,..,l, возможен, если для некоторых $t_l \in [t_{l-1}, t_0^*(I)), b_{il} \geq 0, i = 1, ..., l-1$ разрешима следующая система:

$$\begin{cases} p_{l+1}(t_0, ..., t_l) * f_i * (t_0^*(I) - t_l) + b_{il} < f_i * (t_0^*(I) - t_l), i = 0, .., l-1, \\ \sum\limits_{i<l} b_{il} - p_{l+1}(t_0, ..., t_l) * f_l * (t_0^*(I) - t_l) > 0. \end{cases}$$

Здесь b_{il} - взятка, выплачиваемая агентом уровня i последнему проверяющему, t_l - его сообщение.

Определение. Если для любых $I \in (I_{min}, I_{max}], l = 1, .., k-1; t_0 \leq ... \leq t_l < t_0^*(I)$ система несовместна, будем говорить, что стратегия P определяет СПР с честным поведением.

Утверждение 2. Стратегия P определяет СПР с честным поведением тогда и только тогда, когда для любых $t_0, ..., t_{k-1} < t_{max}$ вероятности проверок удовлетворяют условию:

$$p_1(t_0) \geq \frac{1}{f_0}, p_2(t_0, t_1) \geq \frac{f_0}{f_0 + f_1}, p_s(t_0, t_1, ..., t_{s-1}) \geq \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} f_i}, s = 2, .., k.$$

Утверждение 3. Оптимальная стратегия в классе СПР с честным поведением и оптимальная стратегия, устойчивая к коалиционным отклонениям, совпадают и удовлетворяют условию

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, p_s(t_0, t_1, ..., t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} f_i}$$

для любых $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{s-1} < t_{max}, s = 2, .., k.$

31. Поколения архитектур компьютеров и парадигмы программирования.

Середина 70-х годов: векторно-конвейерные компьютеры.
Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры.
Программирование: векторизация самых внутренних циклов
Суперкомпьютер Cray-1.

Начало 80-х годов: векторно-параллельные компьютеры
Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление
функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры.
Небольшое число процессоров объединяются над общей памятью.
Программирование: векторизация самых внутренних циклов и распараллеливание на
внешнем уровне, единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные.
Суперкомпьютер Cray X-MP

Начало 90-х годов: массивно-параллельные компьютеры
Особенности архитектуры: тысячи процессоров объединяются с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память.
Программирование: обмен сообщениями, отсутствие единого адресного пространства,
PVM, Message Passing Interface. Необходимость выделения массового параллелизма, явного
распределения данных и согласования параллелизма с распределением.
Суперкомпьютер **Cray T3D**, Суперкомпьютер **Intel Paragon XPS140**

Середина 90-х годов: параллельные компьютеры с общей памятью
Особенности архитектуры: сотни процессоров объединяются над общей памятью.
Программирование: единое адресное пространство, локальные и глобальные
переменные, Linda, OpenMP
DEC AlphaServer, суперкомпьютер **Sun StarFire**

Начало 2000-х: кластеры из узлов с общей памятью
Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе
с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в
рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей
памятью.
Программирование: неоднородная схема MPI+OpenMP; необходимость выделения
массового параллелизма, явное распределение данных, обмен сообщениями на внешнем
уровне; распараллеливание в едином адресном пространстве, локальные и глобальные
переменные на уровне узла с общей памятью.
Суперкомпьютер МГУ **"Чебышев"**, **"К"** суперкомпьютер

Середина 2000-х: кластеры из узлов с общей памятью с ускорителями
Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе
с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в
рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей
памятью; на каждом узле несколько ускорителей (GPU, Phi).
Программирование: MPI+OpenMP+OpenCL/CUDA;
Суперкомпьютер МГУ **"Ломоносов"**, суперкомпьютер **Tianhe-2**

70-е – Векторизация циклов
80-е – Распараллеливание циклов (внешних) + Векторизация (внутренних)
90-е - MPI
середина 90-х - OpenMP
середина 2000-х - MPI+OpenMP
2010-е - CUDA, OpenCL, MPI+OpenMP+ускорители (GPU, Xeon Phi) ...

Для каждого поколения нужно анализировать алгоритмы (чтобы приспособить их под новую платформу) и описывать найденные свойства (для эффективной реализации).

Описание алгоритмов: математическое описание, сложность, информационный граф, свойства и особенности, ресурс параллелизма, масштабируемость, локальность данных, детерминированность, вычислительная мощность, входные/выходные данные, вычислительное ядро, локальность вычислений, производительность, эффективность, коммуникационный профиль.

32. Архитектурные особенности современных микропроцессоров.

Микропроцессором (МП) называется программно-управляемое устройство, осуществляющее процесс цифровой обработки информации и управления им и построенное, как правило, на одной БИС (большая интегральная схема).

Архитектурой процессора называется комплекс его аппаратных и программных средств, предоставляемых пользователю.

Особенность	В чем заключается
Многозадачность	Возможность работы в одном из двух режимов: реальном (real) и защищенном (protected). В *реальном* режиме возможно выполнение только одной программы. В *защищенном*(protected) режиме обеспечивается выполнение сразу нескольких программ за счет переключения между задачами
Поддержка системы виртуальных машин	возможность моделирования в одном МП работу нескольких компьютеров, управляемых *разными* ОС.
Конвейерная обработка команд	Одновременное выполнение разных тактов последовательных команд в разных частях МП с непосредственной передачей результатов выполнения из одной части МП в другую.
Кэширование данных	Использование высокоскоростного буфера для обмена данными между микропроцессорной памятью (регистрами МП) и основной памятью ЭВМ.
Суперскалярная архитектура	Наличие в микропроцессоре более 1 конвейера для выполнения команд (параллелизм на уровне инструкций)
Гарвардская архитектура процессора	В кэш-памяти 1 уровня предусмотрено разделение команд и данных, которые хранятся отдельно друг от друга для повышения эффективности обработки
Расширенный набор инструкций	Новые команды, расширяющие базовый набор инструкций МП, для работы с мультимедийной информацией и одновременной однотипной обработки множественных данных.
Многоядерные процессоры	Объединение двух или более исполняющих устройств на одной ИС, действующих как единое устройство.
Технология автоматического увеличения тактовой частоты процессора	Для обеспечения дополнительной производительности и при условии соблюдения ограничений по мощности, температуре и току, процессор может автоматически «разгоняться», то есть увеличивать рабочую тактовую частоту всех своих ядер.

35. Информационный граф и ресурс параллелизма алгоритмов.

Информационный граф (или граф алгоритма) - ориентированный граф, состоящий из вершин, соответствующих операциям, и направленных дуг, соответствующих передаче данных между ними.

Вершины графа алгоритма могут соединиться несколькими дугами, в частности когда в качестве разных аргументов одной операции используется одна и та же величина. Граф алгоритма почти всегда является параметризированным графом.

Граф алгоритма используется как удобное представление алгоритма при исследовании его структуры, ресурса параллелизма, а также других свойств. Его можно рассматривать как параметризованную информационную структуру. Он сохраняет информативность структуры, при этом обладает компактностью за счет параметризации.

Особенностями графа алгоритма являются:

- его ацикличность;
- невозможность, в общем случае, его описания простым перечислением, в силу того, что его составляющие могут зависеть от внешних параметров решаемой им задачи (например, алгоритм, реализующий метод Гаусса — от размера матрицы).

Ресурс параллелизма - это где и насколько мы можем сделать программу более эффективной за счет распараллеливания.

Ресурс параллелизма алгоритма включает:

- Оценку параллельной сложности алгоритма
- Структуру параллелизма (иерархичность)
- Ключевые параллельные ветви в терминах конечного и массового параллелизма

Конечный параллелизм - параллелизм, определяемый информационной независимостью некоторых фрагментов в тексте программы.

Массовый параллелизм - параллелизм, определяемый информационный независимостью итераций циклов программы.

Суперкомпьютерное моделирование турбулентных течений Рассмотрим уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} div\vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \triangledown)\vec{v} + \frac{1}{\rho} grad\, p = \nu \triangle \vec{v} \end{cases}$$

Тут над $\vec{v}$ и p пишется $\sim$, но в техе не получается сделать
Неизвестные: $\vec{v}$ - скорость течения, p - давление. После обрезразмеривания(???) полечаем систему:

$$\begin{cases} div\vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \triangledown)\vec{v} + grad\, p = \frac{1}{Re} A\vec{v} \end{cases} \tag{1}$$

Турбулентное течение состоит из вихрей различных размеров. Крупные вихри переходят в более мелкие, те в еще более мелкие, в еще-еще более мелкие, в еще совсем более мелкие, и так масштабы течения уменьшаются, пока не дойдут до Колмогоровского масштаба, на котором кинетическая энергия движения жидкости или газа переходит в тепло, во внутреннюю энергию, за счет вязкости среды. Происходит переход кинетической энергии по каскаду от крупных вихревых структур течения к более и более мелким.

То есть, чем больше в изучаемом течении перепад масштабов, тем больше нужно сеточных ячеек. У течения есть характеристика – число Рейнольдса (Re). Оно, по сути, определяет перепад масштабов от крупных структур до самых мелких, после которых происходит диссипация в тепло. Чем больше размер объекта или чем больше скорость течения или чем меньше вязкость среды – тем больше это число. Соответственно, тем более высокое нужно пространственное и временное разрешение.

Известно, что при достаточно больших Re(Re $> Re_{crit}$, для разных областей этот Re_{crit} разный) возникают турбулентные течения.
Есть 3 основных моделей турбулентностей:
1)Прямое численное моделирование – DNS (Direct Numerical Simulation). Апроксимируем ур-е (1) на мелкой сетке, ловящие мелкие вихри. Если использовать явные схемы, то из-за мелкой сетки - очень много времени, след-но нужен суперкомп. Неявные схемы - ограничение по времени меньше, но получаем сложную и объемную СЛАУ, к-рая может не поместиться в ОЗУ, след-но нужен суперкомп.
2)Метод крупных вихрей – LES (Large Eddy Simulation).
Моделируем сетку крупнее колмогоровского маштаба и решаем на ней (1), след-но теряем мелкие вихри. После возможно восстановить мелкие вири,

напрмиер каким-либо импирическими моделями из физ экспериментов. Тоже нужен суперкомп.
3)Осредненные уравнения – RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes).
Если вообще все масштабы течения загнать в модель, то получится стационарный расчет RANS. Все масштабы течения мы отдали на откуп модели и получили стационарное осредненное решение – как если бы в каждой ячейке был датчик измерений физических величин, и мы бы усредняли его показания на длительном интервале времени.

Билет 39. Архитектурные особенности графических процессоров, направленные на массивно-параллельные вычисления.

CPU - небольшое число мощных, независимых ядер, 3-х уровневый кэш
GPU - вместо ядер потоковый мультипроцессор (streaming multiprocessor, SM):

1. 32 скалярных ядра CUDA cores, ~1.5ГГц
2. 2 Warp Scheduler (warp - 32 ядра)
3. Файл регистров, 128 КБ
4. 2-х уровневый кэш
5. Текстурные юниты
6. 16 Special Function Unit - интерполяция ~ трансцендентная математика один. Точности

Много простых ядер, работающих на небольшой частоте. Небольшие кэши на GPU: 32 ядра делят 64 КБ L1 кэша, общий L2 кэш, L3 нет.
Оперативная память с высокой пропускной способностью и **высокой латентностью**, оптимизированная для коллективного доступа. Так как память с высокой латентностью, то чтобы эффективнее загружать ядра на много нитей и за счет быстрого переключения контекста перекрывать обращения одних нитей вычислениями в других имеется следующая иерархия:
Нить -> warp (32 нити) -> Block (до 32 warp) -> Grid (решетка из блоков)
Block и Grid - 3d, каждая нить, блок получают свои координаты.
На уровне нитей - SIMD - все нити выполняют одно и то же действие с разными данными. Warp-ы выполняются независимо, называется все - SIMT.

Глобальная память

Расположение в DRAM GPU, до 4ГБ, можно выделять как с хоста, так и с устройства.
Работа оптимизирована так, чтобы отдать максимальное число данных за одно обращение.
Транзакция - загрузка из глобальной памяти пула в 128 байт, начиная с адреса, кратного 128. Взаимодействие идет через кэш. Размер кэш линии L1 - 128 байт, L2 - 32 байта, можно работать не через L1 кэш, тогда транзакции по 32 байта.
Данные хранятся по строкам, чтобы добиться выравнивания по 128 байт, можно воспользоваться CudaMallocPitch - передаем, сколько у нас будет входных данных, возвращаем с учетом padding.

Билет 40. Методы эффективной организации параллельных вычислений на графических процессорах

Коротко:

1. Утилизация латентности памяти
   Цель: эффективно загружать ядра
   Решение CPU: сложная иерархия кэшей
   GPU: За счет наличия сотен ядер и миллионов нитей на GPU легче утилизировать всю полосу пропускания. Быстрое переключения контекста – эффективное перераспределение вычислений
2. SIMT(Single instruction, multiple thread) и масштабирование
   Виртуальное: Поддержка миллионов нитей в GPU; независимость виртуальных блоков
   Аппаратное: Мультипроцессоры независимы -> Можно “нарезать” GPU с разным кол-вом SM (streaming multiprocessor)
3. Асинхронность в CUDA
   Чтобы GPU больше времени работало в фоновом режиме, параллельно с CPU, некоторые вызовы являются асинхронными. Отправляют команду на устройство и сразу возвращают управление хосту
4. Работа с глобальной памятью
   a. Расположена в DRAM GPI
   b. Объем до 4 Гб
   c. Использование кэшей L1, L2

Общие принципы эффективной работы:

- Обращения нитей варпа* в память должны быть пространственно-локальными
- Начала строк матрицы должны быть выровнены
- Использование массивов структур
- Выбор режима кэша L1
- Избегать косвенной адресации
- Избегать обращений нитей варпа* к столбцу матрицы

*Варп – группа из 32 потоков и является минимальным объемом данных, обрабатываемых SIMD-способом в мультипроцессорах CUDA.

Полную версию билета см в gosy.pdf, all.pdf (билет 40) или билеты_скиподы.pdf (билет 16)